УДК 519.13

ІСНУВАННЯ ДЕЯКИХ Т-ФАКТОРІЗАЦІЙ ПОРЯДКУ 12

Л.П.Петренюк, А.Я.Петренюк

We investigate the existence of T-factorizations of the complete graph of order *12*. The algorithm is described constructing a T-factorization for the given tree T when the factorization does exist. With computer aid, T-factorizations are constructed for *143* admissible non-isomorphic trees of the order.

Досліджується задача про існування T-факторизацій повних графів, поставлена у 1964 році Л.Байнеке [1]. Створено алгоритм побудови T-факторизацій порядку *12*, реалізований на ПАСКАЛі, з допомогою якого кількість допустимих дерев порядку *12*, про які відомо, що вони допускають T-факторизації, доведене до 144.

Нехай T – дерево порядку n, K_n – повний граф того ж порядку.

T-факторизацією графу K_n називають таку сукупність дерев $\{T_1, T_2, \ldots, T_k\}$, що (1) всі T_i ізоморфні дереву T, (2) всі T_i – підграфи графу K_n і (3) кожне ребро графу K_n належить одному і тільки одному з дерев $T_1, T_2, \ldots, T_k$. Задача полягає в тому, щоб при заданому n для кожного дерева T порядку n з'ясувати, існує чи ні T-факторизація графу K_n.

1. Результати попередників. Л.Байнеке [1] встановив необхідні умови існування T-факторизації порядку n, а саме: 1) парність числа n, $n=2k$, та 2) виконання нерівності $\Delta(T)\le k$, де $\Delta(T)$ – найвищий степінь вершини у дереві T . Дерева, що задовільняють умови Байнеке, називають *допустимими*.

Наступний крок у розвитку цієї задачі зробили Ш.Хуанг та А.Роса [2], розв'язавши у 1978 задачу існування T-факторизацій для всіх порядків n, $n\le 8$. Нещодавно А.Я.Петренюк [3,4] розв'язав її у випадку $n=10$ та, за винятком 20 дерев, у випадку $n=14$.

Успіху у випадках $n=10$ та $n=14$ досягнуто здебільшого завдяки зручним необхідним умовам існування T-факторизацій, знайденим автором статей [3,4],

та біциклічному методу побудови T-факторизацій, з допомогою якого прове-дено побудови T-факторизацій у випадках їх існування.

У статті [9] (скорочена версія – [11]) одержано ряд результатів про неіснування T-факторизацій порядку 12, для чого застосовано раніше відомі та знайдено нові необхідні умови їх існування.

Дану статтю присвячено існуванню T-факторизацій порядку 12. Порядки $n\equiv 0(mod\ 4)$ вирізняються з-поміж інших тим, що у цих випадках не існує біциклічних Т-факторизацій [3, 4]. Ця обставина привносить певні труднощі у дослідження. Тому на даний момент відомо про існування тільки 20 дерев порядку 12, для яких існують T-факторизації. Ці T-факторизації побудовано півобертовим методом у статті [5].

Нижче описано алгоритм побудови T-факторизацій та викладено результати, одержані з його допомогою для порядку 12.

2. Алгоритм побудови Т-факторизацій.

Ми скористалися зображенням дерев, яке носить назву *шаблонного*. Дерево T порядку $m=2k$ з множиною вершин $\{1,2,\dots,n\}$ зображується парою об'єктів *(П, Ш): послідовністю П* вершин $a_1a_2\dots a_n$ та *шаблоном Ш* – сукупністю $n-1$ пар чисел виду i, j, $1\le i<j\le n$, таких, що (a_i, a_j) – ребро дерева T для кожної пари i, j шаблону.

Задаючи конкретний шаблон *Ш*, ми тим самим фіксуємо дерево T, якому ізоморфні всі компоненти шуканої T-факторизації. Коли послідовність *П* пробігає всі можливі значення у лексикографічному порядку, то представлення (*П, Ш*) дає всі можливі дерева з указаною множиною вершин, ізоморфні дереву T. Цю послідовність дерев ми називаємо *трасою* перебору. Для того, щоб дерева не повторювалися, ми застосовуємо так звані *умови стандартизації*, невиконання яких сигналізує про те, що це дерево вже зустрічалося на трасі, і тому воно пропускається. За рахунок цього перебір істотньо скорочується.

Нехай дерева T_i, T_j – підграфи графу K_n. Ці дерева називають *сумісними*, якщо вони не мають спільних ребер. T-факторизацію можна уявляти як підпослідовність k попарно сумісних дерев траси.

Опишемо тепер обіцяний алгоритм.

0°. Покладаємо $\mathbf{T}=\varnothing$.

1°. Виберемо та зафіксуємо першу компоненту $T_1=(П_1, Ш)$ шуканої T-факторизації, де $П_1$ – лексикографічно найперша підстановка: $\mathbf{T}=\{T_1\}$.

2°. Нехай вибрано компоненти $T_1,\dots,T_{i-1}$ шуканої Т-факторизації. В пошуках i-ої компоненти, $i>1$, здійснюємо перегляд траси у лексикографічному порядку, починаючи з того дерева, яке обрано за $i-1$ компоненту. При цьому кожне дерево перевіряємо на стандартність та на сумісність з усіма компонентами $T_1,\dots,T_{i-1}$. Якщо ці умови виконуються – знайдено компоненту T_i ; додаємо її до $\mathbf{T}$, $\mathbf{T}\to\mathbf{T}\cup\{T_i\}$, покладаємо $i\to i+1$ і здійснюємо перехід до пункту 3°. Якщо ж до кінця траси не знайдено сумісне з $\mathbf{T}$ стандартне дерево – переходимо до виконання пункту 4°.

3°. Якщо $i=k+1$, то $\mathbf{T}$ являє собою шукану T-факторизацію, і роботу закінчуємо.

4°. Якщо $i=2$, то T-факторизації не існує, і роботу закінчуємо. В іншому випадку покладаємо $i\to i-1$, $\mathbf{T}\to\mathbf{T}\backslash\{T_i\}$, і переходимо до пункту 2°.

Для перевірки сумісності дерева T' з раніше вибраними компонентами використовується матриця $A=(a_{ij})$ порядку n, яка на початку обчислень нульова. Як тільки до $\mathbf{T}$ додається нова компонента , остання *реєструється* у матриці A, тобто кожне її ребро ij відзначається покладенням $a_{ij}=a_{ji}=1$. Безпосередньо перед відкиданням компоненти з $\mathbf{T}$ ця компонента *дереєструється.* Таким чином, у момент перевірки сумісності матриця A містить інформацію про сукупний реберний склад множини $\mathbf{T}$. Тому для встановлення сумісності досить пересвідчитися, що дерево T' не містить жодного ребра ij з $a_{ij}=1$.

Істотне прискорення роботи алгоритму досягається за рахунок використання *стратегії стрибків*, яка полягає ось у чому. Якщо переглянуто біжуче дерево $T' = (\Pi', Ш')$ і виявлено його нестандартність чи несумісність з **T**, можна вказати найпершу позицію j підстановки Π', яка заважає включити T' у **T**. Після цього можна "перескочити" через відрізок траси від T' до найпершого з наступних дерев, яке відрізняється від T' у позиції j і не відрізняється у попередніх позиціях, і продовжити перегляд, починаючи з цього дерева .

Наведений алгоритм явно не поліноміальний, але кращого на даний час невідомо.

На основі цього алгоритму автори у випадку $n=12$ створили комп'ютерну програму побудови T-факторизацій. Вона почала значно швидше видавати побудовчі результати після введення ще одного прискорюючого фільтру. Опишемо цей фільтр.

Коли побудована і зареєстрована в A передостання, п'ята компонента T_5, єдиною можливою шостою компонентою може бути граф Z, що складається з усіх невикористаних у **T** ребер. Добудова **T** до T-факторизації можлива тоді і тільки тоді, коли Z ізоморфний T. Для розрізнення неізоморфів ми застосували відомий інваріант $\boldsymbol{d}(Z)=(d_1,d_2,\ldots,d_{11})$ – *розподіл* степенів вершин графу Z, у якому d_i означає кількість тих вершин у графі Z, які мають степінь i $(i=1,\ldots,11)$. Обчисливши $\boldsymbol{d}(Z)$, порівнюємо його з $\boldsymbol{d}(T)$. Якщо $\boldsymbol{d}(Z) \neq \boldsymbol{d}(T)$, то **T** не добудовується до T-факторизації, і можна будувати нову п'яту компоненту. У випадку $\boldsymbol{d}(Z) = \boldsymbol{d}(T)$ продовжуємо роботу так, як вказано в алгоритмі.

3. Результати роботи програми. Створена нами програма дозволила побудувати T-факторизації для ряду дерев класу $T(12, 3)$, тобто тих дерев порядку 12, у яких $\Delta(T)=3$. Нижче під кожним номером подано дерево T у канонічній формі та компоненти відповідної T-факторизації. Дерева зображені списками їх ребер та розміщені у канонічному порядку. Звертаємо увагу читача на те, що півсиметричні дерева (які допускають півобертові T-факторизації), у список не включені.

Список побудованих T-факторизацій для дерев класу $T(12, 3)$

1. 12 13 14 25 26 37 38 49 5A 6B 7C   15 29 2B 36 4A 5C 6A 78 8C AB BC
   16 18 1B 27 3B 45 46 67 79 8A 9C   17 23 3C 4B 4C 59 68 7A 89 9A AC
   19 1A 24 34 35 39 57 58 69 6C 7B   1C 28 2A 2C 3A 47 48 56 5B 8B 9B
2. 12 13 14 25 26 37 38 49 5A 6B 9C   15 16 17 27 2C 35 3A 45 4B 68 69
   18 1C 23 24 28 36 39 47 4A 56 9B   19 2B 3C 46 5C 67 7A 89 8A 8B AC
   1A 29 34 4C 58 6A 79 7B 8C AB BC   1B 2A 3B 48 57 59 5B 6C 78 7C 9A
3. 12 13 14 25 26 37 38 49 5A 6B AC   15 16 17 27 35 3A 45 4C 68 69 AB
   18 23 24 28 36 39 47 4A 56 5C 9B   19 1A 2B 3B 46 57 58 6C 79 9C BC
   1B 2C 34 48 5B 6A 78 7B 7C 89 9A   1C 29 2A 3C 4B 59 67 7A 8A 8B 8C
4. 12 13 14 25 26 37 38 49 5A 7B 9C   15 16 17 27 2C 35 3A 45 68 69 8B
   18 1B 23 24 28 36 39 47 4A 56 7C   19 2B 34 4C 5C 67 78 8A 9B AB AC

1A 29 3C 48 57 59 5B 6B 7A 89 BC 1C 2A 3B 46 4B 58 6A 6C 79 8C 9A
5. 12 13 14 25 26 37 38 49 5A 7B AC 15 16 17 27 35 3A 45 68 69 8C AB
18 23 24 28 36 39 47 4A 56 5B 7C 19 1A 2A 3C 46 4C 58 79 8B 9B BC
1B 29 34 4B 5C 67 6B 6C 78 7A 89 1C 2B 2C 3B 48 57 59 6A 8A 9A 9C
6. 12 13 14 25 26 37 38 49 5A 9B AC 15 16 17 27 2C 35 3A 45 68 69 AB
18 1B 23 24 28 36 39 47 4A 56 5C 19 2A 34 48 5B 6B 79 7A 8C 9C BC
1A 29 3B 4C 58 59 6A 7B 7C 8A 8B 1C 2B 3C 46 4B 57 67 6C 78 89 9A
7. 12 13 14 25 26 37 38 49 5A 9B BC 15 16 17 27 2A 35 3B 45 68 69 AC
18 1C 23 24 28 36 39 47 4A 5C 6B 19 2B 3A 48 4C 57 67 78 8A 9C AB
1A 29 3C 46 56 50 5B 6A 79 8B 8C 1B 2C 34 4B 58 6C 7A 7B 7C 89 9A
8. 12 13 14 25 26 37 38 49 5A AB BC 15 16 17 2B 2C 35 3B 45 68 69 7A
18 29 3A 46 56 58 59 67 7C 8B AC 19 2A 34 4B 5C 6C 79 7B 89 8A 8C
1A 28 3C 47 4C 5B 6A 78 9A 9B 9C 1B 1C 23 24 27 36 39 48 4A 57 6B
9. 12 13 14 25 26 37 38 49 9A AB BC 15 16 17 2B 2C 35 45 68 69 7A AC
18 28 3A 4C 5C 6A 6B 78 79 7C 9B 19 29 3B 3C 46 47 58 7B 8A 8C 9C
1A 2A 34 4B 56 59 5A 67 6C 89 8B 1B 1C 23 24 27 36 39 48 4A 57 5B
10. 12 13 14 25 26 37 38 59 6A 7B 8C 15 23 24 27 35 39 48 4A 69 8B AC
16 2A 39 3C 49 57 68 6B 78 8A 9B 17 18 1A 29 34 47 56 5A 7C 9A BC
19 1C 28 2B 3A 45 5B 5C 67 6C AB 1B 2C 36 46 4B 4C 58 79 7A 89 9C
11. 12 13 14 25 26 37 38 59 6A 7B 9C 15 16 17 23 2C 35 45 4A 68 69 8B
18 2A 39 3B4C 5B 67 7C 89 8C 9A 19 1C 2B 36 49 5A 6C 78 7A AB BC
1A 24 27 28 34 3A 46 57 5C 6B 79 1B 29 3C 47 48 4B 56 58 8A 9B AC
12. 12 13 14 25 26 37 38 59 6A 7B BC 15 16 17 23 35 45 4B 68 69 8A AC
18 2C 39 3C 49 56 5B 7A 8B 9A AB 19 2A 2B 36 4C 58 67 78 7C 9B 9C
1A 1B 29 3B 47 48 4A 5A 6C 89 8C 11C 24 27 28 34 3A 46 57 5C6B 79
13. 12 13 14 25 26 37 38 59 6A 9B AC 15 16 17 23 2C 35 45 4A 68 69 AB
18 2B 39 3C 47 49 4B 5B 6C 8A 9A 19 29 36 4C 56 58 7A 7B 8B 8C 9C
1A 24 27 28 34 3A 46 57 6B 79 BC 1B 1C 2A 3B 48 5A 5C 67 78 7C 89
14. 12 13 14 25 26 37 38 59 6A 9B BC 15 16 17 23 2A 35 45 4B 68 69 AC
18 2B 39 47 56 5B 6C 7C 89 8A 9C 19 29 36 3B 4A 5C 78 7B 8C 9A AB
1A 1C 24 27 28 34 3A 46 57 6B 79 1B 2C 3C 48 49 4C 58 5A 67 7A 8B
15. 12 13 14 25 26 37 38 59 7A 9B AC 15 16 17 23 2C 35 45 68 69 8A AB
18 2B 36 3B 4C 5A 5C 67 8B 8C 9A 19 1C 29 3C 47 49 4A 56 6B 78 7B
1A 24 27 28 34 3A 46 57 5B 79 BC 1B 2A 39 48 4B 58 6A 6C 7C 89 9C
16. 12 13 14 25 26 37 38 59 7A 9B BC 15 16 17 23 2A 35 45 68 69 8B AC
18 29 3C 47 48 49 56 6B 8A 9C AB 19 2B 36 3B 4C 5A 5C 78 7B 7C 9A
1A 1C 24 27 28 34 3A 46 57 5B 79 1B 2C 39 4A 4B 58 67 6A 6C 89 8C
17. 12 13 14 25 26 37 38 59 9A AB BC 15 16 17 2B 2C 35 3A 45 68 69 AC
18 29 3C 46 5C 6B 7A 7B 89 8A 9C 19 2A 34 47 49 58 5A 67 7C 8C 9B
1A 28 3B 4B 4C 57 6A 6C 78 79 8B 1B 1C 23 24 27 36 39 48 4A 56 5B
18. 12 13 14 25 26 37 48 59 6A 7B 7C 15 16 17 27 35 39 45 4A 68 8B 8C
18 23 24 28 36 3A 47 57 6B 79 AC 19 2C 3C 4B 56 58 5A 6C 78 9A AB
1A 29 2A 38 3B 46 49 5C 7A 9B BC 1B 1C 2B 34 4C 5B 67 69 89 8A 9C

19. 12 13 14 25 26 37 48 59 6A 7B 8C   15 19 1B 2B 3A 46 58 5C 6C 79 8A
16 18 23 27 2A 35 47 4B 67 9A BC   17 28 3C 45 49 4A 5B 6B 7A 89 AC
1A 24 2C 38 39 57 68 7C 9B 9C AB   1C 29 34 36 3B 4C 56 5A 69 78 8B
20. 12 13 14 25 26 37 48 59 6A 7B BC   15 24 28 29 3B 3C 46 58 78 7C 9A
16 19 23 2C 3A 4B 57 5C 8A 9B 9C   17 1A 2B 39 45 4A 67 68 6B 79 8C
18 27 36 49 4C 5B 6C 7A 89 AB AC   1B 1C 2A 34 35 38 47 56 5A 69 8B
21. 12 13 14 25 26 37 48 59 7A 7B 8C   15 16 17 27 2C 35 39 45 68 8A 8B
18 1B 23 24 28 36 3A 47 56 79 7C   19 2B 34 46 57 5B 6A 89 9C AB AC
1A 29 38 3B 4C 5C 6B 6C 78 9A 9B   1C 2A 3C 49 4A 4B 58 5A 67 69 BC
22. 12 13 14 25 26 37 48 59 7A 7B 9C   15 16 17 27 35 39 45 68 8A 8C 9B
18 23 24 28 36 3A 47 56 5B 79 7C   19 1A 2C 34 38 46 4B 5C 67 6A BC
1B 2A 2B 3B 4C 57 58 69 89 9A AC   1C 29 3C 49 4A 5A 6B 6C 78 8B AB
23. 12 13 14 25 26 37 48 59 7A 7B AC   15 16 17 27 35 39 45 68 8A 8C AB
18 23 24 28 36 3A 47 56 79 7C 9B   19 1C 2B 38 4C 57 5A 6A 89 9A BC
1A 2C 34 3B 46 4A 5B 69 6C 78 8B   1B 29 2A 3C 49 4B 58 5C 67 6B 9C
24. 12 13 14 25 26 37 48 59 7A 8B 9C   15 2A 34 39 3A 45 67 68 8A 9B BC
16 23 24 35 5A 5B 6B 78 79 9A AB   17 18 28 29 2C 38 3B 47 56 6C AB
19 1B 1C 27 36 4A 4B 57 5C 69 8C   1A 2B 3C 46 49 4C 58 6A 7B 7C 89
25. 12 13 14 25 26 37 48 59 7A 8B AC   15 19 2A 2C 35 46 4B 5B 67 8C AB
16 24 36 38 3B 4C 5A 6A 79 89 BC   17 18 27 29 2B 3A 3C 47 4A 58 69
1A 1C 28 39 45 56 5C 6B 78 7C 9A   1B 23 34 49 57 68 6C 7B 8A 9B 9C
26. 12 13 14 25 26 37 48 59 7A 79 9C   15 16 17 27 35 3A 45 68 89 AB AC
18 23 24 28 36 39 47 56 5A 5C 7B   19 2C 34 38 46 49 58 6A 6B 7C BC
1A 2B 3B 4A 4B 57 69 6C 79 8C 9A   1B 1C 29 2A 3C 4C 5B 67 78 8A 8B
27. 12 13 14 25 26 37 48 59 7A 9B AC   15 28 3A 3C 45 46 49 5B 67 8B 9A
16 17 18 23 39 4B 57 6C 79 8A BC   19 2A 2C 36 3B 4A 5C 68 7B 89 8C
1A 1C 24 29 2B 34 38 47 56 6B 7C   1B 27 35 4C 58 5A 69 6A 78 9C AB
28. 12 13 14 25 26 37 48 59 7A 9B BC   15 23 28 36 3A 46 49 5A 6B 79 7C
16 17 1A 2B 2C 34 4A 56 69 78 9C   18 1C 24 39 4C 57 5B 68 8B 9A AB
19 27 38 3B 3C 4B 5C 67 6A 89 AC   1B 29 2A 35 45 47 58 6C 7B 8A 8C
29. 12 13 14 25 26 37 48 59 7A AB AC   15 16 17 27 35 3A 45 68 89 9B 9C
18 23 24 28 36 39 47 57 5B 5C 6A   19 1C 2A 3C 46 49 4A 56 6B 7C 8B
1A 2B 34 3B 4C 58 69 6C 7B 8A 8C   1B 29 2C 38 4B 5A 67 78 79 9A BC
30. 12 13 14 25 26 37 48 59 7A AB BC   15 24 3B 3C 47 56 57 68 79 9A AC
16 17 2A 38 49 4B 5C 6B 89 8A 9C   18 19 27 2C 36 4A 5B 6A 6C 8C 9B
1A 1B 23 28 29 34 3A 45 69 7B 7C   1C 2B 35 39 46 4C 58 5A 67 78 8B
31. 12 13 14 25 26 37 48 59 9A AB BC   15 16 17 2A 2B 36 45 5A 78 9B 9C
18 23 29 2C 34 38 47 5B 5C 6A 6B   19 28 3A 3B 4B 56 67 79 7B 8C AC
1A 1B 27 35 3C 46 49 4C 7C 89 8A   1C 24 39 4A 57 58 68 69 6C 7A 8B
32. 12 13 14 25 26 37 48 79 7A 8B 9C   15 16 17 27 2C 35 45 68 89 8A 9B
18 1A 23 24 28 36 39 47 57 5C 7C   19 2B 3A 3C 49 58 5B 6A 6B 7C 9A
1B 29 3B 4A 4C 59 5A 67 6C 8C AB   1C 2A 34 38 46 4B 56 69 78 AC BC
33. 12 13 14 25 26 37 48 79 7A 8B BC   15 16 17 27 2A 35 45 68 89 8C AB

18 1A 23 24 28 36 39 47 57 7B AC 19 2C 34 38 3B 59 5A 6A 6B 6C 7C
1B 2B 3A 49 4A 56 5C 67 8A 9B 9C 1C 29 3C 46 4B 4C 58 5C 69 78 9A
34. 12 13 14 25 26 37 48 79 7A 9B AC 15 16 17 27 35 45 68 89 8A 9C AB
18 23 24 28 36 39 47 57 5A 7B BC 19 1C 2B 2C 38 4A 4B 56 67 6C 8B
1A 29 3A 46 4C 5B 5C 69 6A 78 8C 1B 2A 34 3B 3C 49 58 59 6B 7C 9A
35. 12 13 14 25 26 37 48 79 7A 9B BC 15 16 17 27 35 45 68 89 8B 9A AC
18 23 24 28 36 39 47 57 5A 7C AB 19 1B 2B 3C 4C 58 5B 69 6A 78 9C
1A 2C 34 38 3A 49 4B 56 5C 67 8C 1C 29 2A 3B 46 4A 59 6B 6C 7B 8A
36. 12 13 14 25 26 37 48 79 8A 9B 9C 15 16 17 27 29 35 45 68 8B AB BC
18 1A 23 24 28 36 39 47 57 5B 5C 19 2B 3C 4A 4B 58 5A 69 7C 89 AC
1B 2C 3B 46 49 59 6A 6C 7A 7B 8C 1C 2A 34 38 3A 4C 56 67 6B 78 9A
37. 12 13 14 25 26 37 48 79 8A 9B AC 15 16 17 27 2A 35 45 68 89 9C AB
18 1B 23 24 28 36 39 47 57 5A BC 19 2B 3B 4A 4C 56 59 67 7A 7B 8C
1A 2C 38 46 49 58 5B 6B 6C 7C 9A 1C 29 34 3A 3C 4B 5C 69 6A78 8B
38. 12 13 14 25 26 37 48 79 8A 9B BC 15 16 17 24 3B 3C 47 58 5A 69 9C
18 29 36 49 4A 5B 5C 67 6A 8B AC 19 1B 23 28 2A 34 39 46 56 7B 7C
1A 2C 3A 4B 4C 57 59 68 6B 78 AB 1C 27 2B 35 38 45 6C 7A 89 8C 9A
39. 12 13 14 25 26 37 48 79 9A 9B AC 15 16 17 27 35 45 68 8B 9C AB BC
18 1A 2B 34 38 3B 49 4C 56 5A 7A 19 2C 3A 4A 58 69 6A 6B 7B 7C 8C
1B 23 24 28 36 39 47 57 5B 5C 8A 1C 29 2A 3C 46 4B 59 67 6C 78 89
40. 12 13 14 25 26 37 48 79 9A AB AC 15 16 17 28 29 35 45 68 7A 9B 9C
18 1A 23 24 27 36 39 4A 57 8B 8C 19 2C 3C 47 4B 56 58 5A 67 69 BC
1B 2A 38 46 4C 5B 6A 6B 78 7C 89 1C 2A 38 46 4C 5B 6A 6B 78 89 7A
41. 12 13 14 25 26 37 48 79 9A AB BC 15 27 3A 45 4A 4B 59 67 6C 8B 8C
16 24 2B 34 35 38 46 7A 7C 9B 9C 17 18 19 29 2A 3B 3C 47 57 68 AC
1A 1B 23 36 4C 58 5B 5C 6A 78 89 1C 28 2C 39 49 56 5A 69 6B 7B 8A
42. 12 13 14 25 26 37 58 69 7A 7B AC 15 16 17 35 23 45 49 68 8A 8C AB
18 2B 3C 4B 4C 5A 67 79 8B 9A 9C 19 29 2A 3A 48 4A 56 6B 7C 9B BC
1A 1C 2C 36 38 3B 47 59 6C 78 89 1B 24 27 28 34 39 46 57 5B 5C 6A
43. 12 13 14 25 26 37 58 69 7A AB AC 15 16 17 23 35 45 4A 68 89 9B 9C
18 2A 2B 3C 47 49 4B 5C 67 6C 8B 19 1C 2C 3A 48 5A 6B 78 7B 7C 9A
1A 29 36 38 3B 4C 56 59 79 8A 8C 1B 24 27 28 34 39 46 57 5B 6A BC
44. 12 13 14 25 26 37 58 79 7A 8B 9C 15 16 17 23 2C 35 45 68 89 8A 9B
18 1B 2A 3C 4B 59 69 6C 78 8C AB 19 24 27 28 34 39 46 57 5A 5B AC
1A 29 3B 47 48 5C 6A 6B 7C 9A BC 1C 2B 36 38 3A 49 4A 4C 56 67 7B
45. 12 13 14 25 26 37 58 79 7A 8B BC 15 16 17 23 2A 35 45 68 89 8C AB
18 2B 3C 48 4C 59 6A 6B 78 9A 9C 19 1C 24 27 28 34 39 46 57 5A 5B
1A 29 3B 49 4A 56 6C 7B 7C 8A 9B 1B 2C 36 37 3A 47 4B 5C 67 69 AC
46. 12 13 14 25 26 37 58 79 7A 9B AC 15 16 17 23 35 45 68 89 8A 9C AB
18 29 3B 47 4A 5C 6A 6C 8B 8C 9A 19 2C 36 38 3A 4B 56 69 78 7B 7C
1A 24 27 28 34 39 46 57 5A 5B BC 1B 1C 2A 2B 3C 48 49 4C 59 67 6B
47. 12 13 14 25 26 37 58 79 7A 9B BC 15 16 17 23 35 45 68 89 8B 9A AC
18 29 3B 47 48 49 5C 6B 6C 8A AB 19 2B 2C 36 38 3A 4C 56 69 7B 8C

1A 1C 24 27 28 34 39 46 57 5A 5B
48. 12 13 14 25 26 37 58 79 8A 9B 9C
18 1A 2A 3A 49 5C 67 69 6B 7C 89
1B 24 27 28 34 3B 46 57 5A 9A AC
49. 12 13 14 25 26 37 58 79 8A 9B BC
17 24 38 3A 4B 4C 5B 69 6C 78 AB
1A 2C 35 48 49 57 5C 67 6B 8C 9A
50. 12 13 14 25 26 37 58 79 9A 9B AC
18 1C 2A 3B 49 4A 57 6C 7B 7C 8A
1A 29 2B 3C 48 59 67 6A 6B 89 8C
51. 12 13 14 25 26 37 58 79 9A AB AC
18 28 38 3A 4A 4C 59 6C 7B 9B 9C
1A 27 3B 4B 57 5C 67 69 6A 8B 8C
52. 12 13 14 25 26 37 58 79 9A AB BC
16 27 3A 3B 45 56 57 78 8A 9B 9C
19 1A 23 24 28 35 39 68 7B 7C AC
53. 12 13 14 25 26 37 78 79 8A 9B AC
18 2B 3B 46 4C 57 5C 69 6B 7A 8C
1A 2C 34 39 3A 4B 58 5B 6A 7B 7C
54. 12 13 14 25 26 37 78 79 8A AB BC
18 2C 3C 46 4A 4C 57 59 67 7B 89
1B 2A 34 39 3A 4B 56 5B 6C 7A 8C
55. 12 13 14 25 26 37 78 89 8A 9B AC
18 24 38 39 3A 4B 58 6A 6B 7B 7C
1A 1B 27 3C 49 4A 56 69 6C 7A 8C
56. 12 13 14 25 26 37 78 89 8A 9B BC
18 2C 38 39 3A 46 4C 58 67 6B AB
1A 27 3C 4A 4B 5C 69 6A 79 7C 8B
57. 12 13 14 25 26 37 78 89 9A 9B AC
18 29 38 3A 3B 49 4C 5867 6A 79
1B 23 24 27 36 39 48 5A 5B 5C 8A
58. 12 13 14 25 26 37 78 89 9A AB AC
16 19 23 24 27 57 67 8A 8B 8C 9B
1A 2A 35 38 39 47 4A 4C 68 6B BC
59. 12 13 14 25 26 37 78 89 9A AB BC
18 2B 3B 47 4C 56 59 6A 6B 79 8C
1A 1B 23 24 27 36 39 48 5B 5C 8A
60. 12 13 14 25 36 47 58 59 6A 6B 7C
18 23 24 27 38 45 5B 5C 67 69 8A
1B 2C 37 3A 4A 4C 57 6C 8B 9A 9B
61. 12 13 14 25 36 47 58 59 6A 6B 8C
16 29 2A 3B 46 5C 67 7A 89 9C AB
1A 26 28 2C 3A 4A 4B 57 69 7B 8B

1B 2A 3C 4A 4B 59 6A 78 7C 9C
15 16 17 23 29 45 68 8B AB BC AB
19 2B 3C 47 4A 4B 59 5B 6C 78 8C
1C 2C 36 38 39 48 4C 56 6A 7A 7B
15 16 18 27 3B 3C 45 5A 7A 89 9C
19 1B 23 28 2A 34 39 56 6A 7B 7C
1C 29 2B 36 46 47 4A 59 68 8B AC
15 6 17 23 35 45 68 8B 9C AB BC
19 2C 36 38 3A 47 4B 4C 56 69 78
1B 24 27 28 34 39 46 5A 5B 5C 7A
15 16 17 2A 2B 2C 35 39 45 68 8A
19 1B 23 29 34 36 47 48 5B 7A BC
1C 24 3C 46 49 56 5A 6B 78 7C 89
15 18 2C 34 3C 4B 59 5C 6A 6B 7A
17 1B 29 38 48 49 4A 5B 67 6C 8C
1C 2A 2B 36 46 47 4C 5A 69 89 8B
15 16 17 28 2A 35 45 68 89 9C AB
19 1B 23 24 27 36 38 49 59 5A BC
1C 29 3C 47 48 4A 56 67 6C 8B 9A
15 16 17 28 29 35 45 68 8B 9A AC
19 1A 23 24 27 36 38 49 5A 5C 9B
1C 2B 3B 47 48 58 69 6A 6B 7C 9C
15 16 17 28 29 2A 35 45 68 9C AB
19 2C 3B 46 4C 57 5A 67 79 8B BC
1C 23 2B 34 36 47 48 59 5B 5C 9A
15 16 17 28 29 2B 35 45 68 9A AC
19 1C 23 2A 34 36 47 48 59 5A 5B
1B 24 3B 49 56 57 6C 7A 7B 8C 9C
15 16 17 28 2B 35 45 68 9C AB BC
19 1A 2A 3C 47 4A 56 6B 6C 7B 8C
1C 2C 34 46 4B 57 59 69 7A 7C 8B
15 28 29 34 45 48 56 7A 7B 7C 9C
17 18 1B 2B 3A 3C 46 5B 5C 69 6A
1C 2C 36 3B 49 4B 58 59 5A 6C 79
15 16 17 28 2A 35 45 68 9B 9C AC
19 29 34 3C 49 4B 58 5A 67 6C 7A
1C 2C 38 3A 46 4A 57 69 7B 7C 8B
15 16 17 26 2A 2B 34 35 39 78 8C
19 1A 28 3B 48 49 5A 68 7A 9C BC
1C 29 3C 46 4B 56 79 7B 89 AB AC
15 17 19 24 34 3C 45 68 78 8A 9B
18 1C 27 35 39 49 4C 56 5A 79 BC
1B 23 2B 37 38 48 5B 6C 7C 9A AC

62. 12 13 14 25 36 47 58 59 6A 7B 8C
16 1A 2A 34 4C 56 5B 6C 79 8B 9B
18 1B 1C 27 29 2C 3A 3B 46 48 57
15 24 37 45 5C 69 6B 78 89 9C AB
17 26 38 39 3C 4B 5A 68 7A 9A BC
19 23 28 2B 35 49 4A 67 7C 8A AC

63. 12 13 14 25 36 47 58 59 6A 7B AC
16 17 23 34 46 5A 6B 7A 8C 9C BC
1A 1C 24 27 2B 35 38 48 56 89 9A
15 18 28 29 3A 3C 45 57 68 6C 9B
19 2A 2C 39 49 4B 5C 67 78 8B AB
1B 26 37 3B 4A 4C 5B 69 79 7C 8A

64. 12 13 14 25 36 47 58 59 6A 8B 9C
16 1C 2B 2C 34 3A 4C 57 7B 89 9B
19 27 28 35 3B 4A 4B 6B 6C 8A 9A
15 18 23 29 45 49 5C 67 69 7A BC
17 1A 26 2A 37 39 46 5A 5B 78 8C
1B 24 38 3C 48 56 68 79 7C AB AC

65. 12 13 14 25 36 47 58 59 6A 8B AC
16 18 28 2B 35 3B 48 4A 7A 7C 9B
19 1C 23 2C 4B 56 6B 79 7B 8A 9A
15 1B 29 3B 3C 45 57 68 6C 78 89
17 24 26 37 38 39 49 4C 5A 5C AB
1A 27 2A 34 46 5B 67 69 8C 9C BC

66. 12 13 14 25 36 47 58 59 6A 8B BC
16 27 29 37 3A 4A 5B 5C 67 89 9B
18 23 26 34 45 4B 78 79 7B 9C AC
15 19 1A 2B 2C 38 39 3B 46 56 7A
17 1C 28 2A 3C 48 4C 57 68 69 AB
1B 24 35 49 5A 6B 6C 7C 8A 8C 9A

67. 12 13 14 25 36 47 58 59 6A AB AC
18 2C 37 46 48 49 5C 6C 7A 7B 9A
1A 1C 2B 3B 4B 4C 56 57 68 69 7C
15 16 17 26 29 34 35 3A 78 9B 9C
19 28 2A 39 3C 4A 5A 6B 79 8B 8C
1B 23 24 27 38 45 5B 67 89 8A BC

68. 12 13 14 25 36 47 58 59 6A AB BC
16 17 2A 37 3B 4A 4B 56 68 79 9C
1A 2C 34 39 46 5C 78 7A 7B 8C 9B
15 18 28 29 38 3A 45 57 6B 6C AC
19 26 2B 35 3C 49 4C 67 7C 8B 9A
1B 1C 23 24 27 48 5A 5B 69 89 8A

69. 12 13 14 25 36 47 58 59 8A AB AC
18 23 24 27 38 45 6A 6B 6C 79 8B
1A 28 29 2A 39 46 48 4C 5B 7B BC
15 16 17 26 34 35 3A 49 78 9B 9C
19 2C 37 3B 4A 5C 67 69 7A 89 8C
1B 1C 2B 3C 4B 56 57 5A 68 7C 9A

70. 12 13 14 25 36 47 58 59 8A AB BC
16 23 2A 48 4A 57 69 7B 7C 9B AC
1A 26 27 35 38 45 46 5B 6A 89 9C
15 18 19 2B 2C 34 30 3A 4B 56 78
17 24 29 3B 4C 5C 67 68 6B 8C 9A
1B 1C 28 37 3C 49 5A 6C 79 7A 8B

71. 12 13 14 25 36 47 58 69 7A 8B 8C
16 1A 26 27 34 3B 59 6B 79 8A 9C
18 28 2B 37 48 56 5B 5C 6A 7C 9A
15 1B 2A 2C 3A 45 57 68 6C 89 BC
17 19 24 39 3C 46 4C 5A 78 9B AB
1C 23 29 35 38 49 4A 4B 67 7B AC

72. 12 13 14 25 36 47 58 69 7A 8B 9C
16 24 34 3C 59 6A 7B 7C 8A 8C 9B
18 1B 28 35 37 45 46 5B 6C 79 9A
15 1C 23 2A 39 4A 4C 67 6B 89 AB
17 19 26 27 2B 38 48 4B 56 5A AC
1A 29 2C 3A 3B 49 57 5C 68 78 BC

73. 12 13 14 25 36 47 58 69 8A 8B AC
16 19 2C 39 48 4B 5B 6A 6C 7A 7B
18 1A 28 2B 34 45 56 5A 67 79 8C
15 26 29 35 3C 4A 4C 78 7C 9A 9B
17 1B 23 24 27 38 46 5C 89 AB BC
1C 2A 37 3A 3B 49 57 59 68 6B 9C

74. 12 13 14 25 36 47 58 69 8A 9B AC
16 27 2A 2B 34 38 57 6C 8B 9A 9C
19 1B 24 39 46 5A 5C 67 6B 78 8C
15 18 26 2C 37 45 4C 7A 89 AB BC
17 29 3A 3C 48 4A 4B 59 5B 68 7C
1A 1C 23 28 35 3B 49 56 6A 79 7B

75. 12 13 14 25 36 47 58 69 8A AB AC
16 1C 24 35 39 46 4A 78 7B 9B 9C
18 28 2B 37 48 56 57 5C 6A 9A BC
15 1B 27 29 2C 38 3C 4B 59 6B 7A
17 19 23 26 3A 3B 45 49 68 7C 89
1A 2A 34 4C 5A 5B 67 6C 79 8B 8C

76. 12 13 14 25 36 47 58 69 8A AB BC
15 1A 27 29 35 39 48 6B 6C 78 7C

16 23 2A 34 46 37 5B 5C 79 8B AC
18 19 24 26 3C 45 68 7A 7B 9B 9C
77. 12 13 14 25 36 47 58 89 8A 9B BC
16 1B 23 37 4C 57 5A 69 7C 8B AB
1A 26 27 35 38 3B 45 46 6A 8C 9C
78. 12 13 14 25 36 47 58 89 9A 9B AC
16 1B 23 3C 49 5C 6C 79 7A 7B 8A
1A 26 27 35 38 45 46 6A 8B 8C 9C
79. 12 13 14 25 36 47 58 89 9A AB AC
16 1B 29 37 3B 4C 57 5A 6C 79 8C
1A 26 27 35 38 45 46 6A 8B 9B BC
80. 12 13 14 25 36 47 58 89 9A AB BC
17 18 29 2A 35 49 4B 57 6A 6C 7C
1B 24 28 3B 3C 59 5C 68 69 78 7A
81. 12 13 14 25 36 57 58 69 6A 7B 9C
18 1C 23 26 27 34 49 4A 59 78 8B
1A 28 35 4C 56 5B 6C 79 7C 8A AB
82. 12 13 14 25 36 57 58 69 6A 7B BC
18 2A 3A 46 47 4B 59 68 7A 8C 9C
1B 2C 37 3C 4C 5A 67 79 8A 8B 9B
83. 12 13 14 25 36 57 58 69 7A 9B 9C
16 18 27 29 2A 37 3B 4B 56 6A BC
19 1C 26 28 39 49 5A 6B 6C 78 8A
84. 12 13 14 25 36 57 58 69 7A 9B AC
18 1A 24 35 3B 45 46 67 78 79 BC
1B 2B 2C 38 4A 59 5A 68 6C 7C 89
85. 12 13 14 25 36 57 58 69 9A 9B AC
18 1A 28 3A 3C 47 4B 4C 5A 67 89
1B 2A 3B 45 46 49 5B 6C 78 7A 7C
86. 12 13 14 25 36 57 58 69 9A AB AC
16 1B 23 37 3C 4B 5B 67 89 8A 8C
19 26 27 39 3B 49 56 6C 78 7A BC
87. 12 13 14 25 36 57 58 69 9A AB BC
16 18 19 23 24 28 5A 5B 6B 7A 7C
1B 29 2C 38 3B 46 47 4A 59 79 8C
88. 12 13 14 25 36 57 68 79 7A 8B 9C
16 19 23 24 37 3C 4B 5B 6C 8A AB
1A 26 28 39 48 4C 58 6A 7B 9B BC
89. 12 13 14 25 36 57 68 79 7A 8B BC
16 17 19 2B 2C 34 45 4A 56 89 8C
1A 1B 27 29 35 38 3B 47 69 6A AC
90. 12 13 14 25 36 57 68 79 8A 9B 9C
16 19 1B 26 27 34 47 4C 58 5A 8B

17 28 2C 3B 4B 4C 57 59 6A 89 9A
1B 1C 2B 38 3A 49 4A 56 5A 67 8C
15 18 19 24 2A 34 39 4B 56 78 AC
17 29 2B 3C 48 4A 59 67 6B 6C 9A
1C 28 2C 3A 49 5B 5C 68 79 7A 7B
15 18 19 24 2A 2C 34 39 56 78 AB
17 29 3B 48 4C 5A 5B 67 68 69 BC
1C 28 2B 37 3A 4A 4B 5B 59 6B 7C
15 18 19 2A 2B 2C 34 39 4A 56 78
17 23 24 48 4B 59 5B 67 7C 8A 9C
1C 28 3A 3C 49 5C 68 69 6B 7A 7B
15 16 26 27 34 46 5A 8B 8C 9B AC
19 1A 2B 2C 37 38 3A 48 5B 67 9C
1C 23 39 45 4A 4C 56 6B 79 7B 8A
15 16 17 24 2C 37 39 3A 45 48 9B
19 2A 37 3B 4B 4C 5C 6B 89 8C 9A
1B 29 2B 38 46 5A 67 68 7A AC BC
15 16 17 26 29 2B 34 35 38 4A AC
19 1A 23 24 27 39 45 56 5C 89 AB
1C 28 3B 48 49 5B 6B 6C 78 7C 9A
15 1A 23 24 38 46 47 59 5C 89 8B
17 2C 34 3C 45 48 68 79 7B AB AC
1B 2B 35 3A 4A 4C 5B 67 7C 8C 9A
15 16 17 26 29 34 3A 47 48 9C AB
19 27 28 2A 3C 4B 56 5C 6B 8C 9A
1C 23 37 39 49 4C 5B 6A 7B 8A 8B
15 16 17 26 2B 34 35 38 9C AB BC
19 23 24 27 39 4A 59 68 6A 6B 8C
1C 29 2C 37 48 56 5C 79 7B 8A 8B
15 17 1C 29 2A 2B 34 38 46 4C 8B
18 24 28 35 4A 59 5A 68 79 7B 7C
1A 2C 3A 45 47 48 5C 6A 6B 9B 9C
15 17 27 35 45 68 6A 78 9B 9C AC
1A 2A 37 3C 48 49 4B 56 6C 7B 8A
1C 26 2B 34 39 3A 4C 5C 67 89 8B
15 17 27 38 3B 49 69 6B 7C 9A AC
18 1B 2C 34 3A 46 47 59 5A 5C 78
1C 29 2A 2B 35 45 4A 56 67 89 8C
15 23 28 37 39 49 4B 58 5A 6B 6C
18 2A 3A 46 4C 5B 5C 67 78 9C AB
1C 24 26 3C 48 59 7B 7C 8A 9A 9B
15 2C 3C 49 4B 5B 69 78 7A 89 AC
17 28 2A 35 39 3B 45 46 67 7C AB

18 1C 24 29 2B 37 3A 48 5C 6A 6C 1A 23 38 4A 56 59 6B 7B 8C 9A BC
91. 12 13 14 25 36 57 68 79 8A 9B BC 15 16 1C 2B 34 39 4C 67 78 8B 9A
17 2A 35 3B 48 4A 59 6A 6B 7C 8C 18 1A 29 3A 47 49 58 5C 6C 7B BC
19 26 27 28 38 3C 46 4B 5A 5B 9C 1B 23 24 2C 37 45 56 69 7A 89 AB
92. 12 13 14 25 36 57 68 79 8A 9B BC 15 16 1A 2B 34 38 4A 67 7B 89 9C
17 18 29 35 39 47 4C 5B 6C AB AC 19 26 27 28 3B 3C 48 49 5A 5C 6A
1B 2C 3A 46 4B 56 59 78 7A 8C 9A 1C 23 24 2A 37 45 58 69 6B 7C 8B
93. 12 13 14 25 36 57 68 79 9A 9B AC 15 17 23 26 38 49 59 67 6A 9C BC
16 1A 27 2C 35 37 39 4B 56 8A AB 18 19 2B 3C 4A 4C 58 5B 69 6C 78
1B 24 29 3A 3B 46 48 5A 7B 7C 8C 1C 28 2A 34 45 47 5C 6B 7A 89 8B
94. 12 13 14 25 36 57 68 79 9A AB BC 15 16 17 26 28 34 32 4A AC 9B 9C
18 2B 3A 3C 46 48 59 5C 6A 78 7B 19 1B 23 24 27 38 45 5A 6B 6C 89
1A 2C 3B 49 4C 56 58 69 7A 7C 8B 1C 29 2A 37 39 47 4B 5B 67 8A 8C
95. 12 13 14 25 36 57 78 89 9A AB AC 15 16 17 26 34 35 49 8A 8B 8C 9B
18 19 23 24 27 38 45 6A 6B 6C 9C 1A 28 29 2A 37 3C 47 59 5B 67 BC
1B 2B 39 3B 48 4A 4C 56 5A 69 7C 1C 2C 3A 46 4B 58 5C 68 79 7A 7B
96. 12 13 14 25 36 57 78 89 9A AB BC 15 16 17 26 34 35 48 8A AC 9B 9C
18 1A 23 24 27 38 49 5A 5B 6B 6C 19 2B 37 45 4C 56 6A 79 7A 8B 8C
1B 2C 39 3A 4A 4B 58 5C 67 69 7C 1C 28 29 2A 3B 3C 46 47 59 68 7B
97. 12 13 14 25 56 67 78 89 9A AB BC 15 16 17 23 28 34 47 8A 9B 9C AC
18 26 27 3B 3C 48 4B 57 59 5A 6C 19 1A 24 36 39 45 46 7A 7B 8B 8C
1B 29 2C 35 37 38 49 4A 5C 6A 6B 1C 2A 2B 3A 4C 58 5B 68 69 79 7C

Поданий список є підставою для наступної теореми.

Теорема 1. *Принаймні 97 неізоморфних дерев класу T(12,3) допускають T-факторизацію.*

Крім цього, побудовано *T*-факторизації для наступних дерев (вказано значення інваріанту ***d*** кожного дерева).

98. 12 13 14 15 16 27 28 29 3A 4B 7C ***d***(*T*)=(7,3,0,1,1,0)
12 13 14 15 16 27 28 29 3A 4B 7C 17 25 2C 39 45 56 57 58 69 6A 6B
18 23 2B 34 35 36 37 48 49 4B 5C 19 26 38 4C 5A 68 78 89 8A 9B 9C
1A 1B 24 3B 47 5B 67 79 7B 8C BC 1C 2A 3C 46 59 6C 7A 8B 9A AB AC
99. 12 13 14 15 16 27 28 29 3A 4B AC ***d***(*T*)=(7,3,0,1,1,0)
12 13 14 15 16 27 28 29 3A 4B AC 17 25 2C 3C 45 56 58 69 6A 6B 7C
18 1A 24 39 47 59 67 78 79 7B 9C 19 2A 3B 46 5B 6C 7A 8A 9B AB BC
1B 23 2B 34 35 36 37 48 49 4A 5C 1C 26 38 4C 5A 68 7C 89 8B 8C 9A
100. 12 13 14 15 16 27 28 29 3A 7B AC ***d***(*T*)=(7,3,0,1,1,0)
12 13 14 15 16 5A 67 68 69 7B AC 17 1C 23 24 25 26 27 6A 78 79 AB
18 28 2A 34 35 36 37 38 7C 89 BC 19 2C 3A 3C 45 47 48 4B 4C 6C 9B
1A 29 39 49 56 5C 7A 8A 8B 9A 9C 1B 2B 3B 46 4A 57 58 59 6A 6B 8C
101. 12 13 14 15 16 27 28 29 3A 7B 8C ***d***(*T*)=(7,3,0,1,1,0)
12 13 14 15 16 5A 67 68 69 7B 8C 17 1C 23 24 25 26 27 6A 78 79 8B
18 28 2B 34 35 36 37 38 7A 89 9C 19 2A 3B 45 47 48 49 4B 6C AB BC

1A 29 3A 4A 4C 57 59 6B 8A 9A 9B 1B 2C 39 3C 46 56 58 5B 5C 7C AC

102. 12 13 14 15 26 67 78 79 8A 9B AC **d**(*T*)=(5,5,1,1,0,0)

12 13 14 15 56 67 78 79 8A 9B AC 16 17 23 24 25 26 7A 7B 8B 9A 9C

18 2A 3B 3C 45 47 49 4C 68 6B AB 19 1A 27 28 34 35 36 37 89 8C BC

1B 29 2B 39 3A 46 57 58 5A 5C 69 1C 2C 38 48 4A 4B 59 5B 6A 6C 7C

103. 12 13 14 15 26 67 78 79 8A AB BC **d**(*T*)=(5,5,1,1,0,0)

12 13 14 15 56 67 78 79 8A AB BC 16 17 23 24 25 26 7A 7B 89 8C 9A

18 19 27 28 34 35 36 37 8B 9C AC 1A 2A 2B 39 3A 45 47 48 4B 69 6C

1B 2C 38 3B 46 4C 57 58 59 5A 6B 1C 29 3C 49 4A 5B 5C 68 6A 7C 9B

Наша програма побудувала також *T*-факторизації для 20 неізоморфних дерев порядку 12, які мають розподіл степенів вершин **d**(*T*)=(6,3,2,1,0,0). Ці *T*-факторизації опубліковано в тезах [10].

Враховуючи щойно наведені результати та 20 напівсиметричних дерев, для яких *T*-факторизації побудовано в [5], ми формулюємо підсумкову теорему.

Теорема 2. *Існують принаймні 143 неізоморфних допустимих дерев порядку 12, для яких існують T-факторизації.*

Висновки та перспективи. З наведених результатів випливає, що існування *T*-факторизацій порядку 12 для багатьох дерев можна встановити (і для багатьох вже встановлено!) побудовою, яка проводиться комп'ютерною програмою, створеною авторами за описаним вище алгоритмом. Продовжується систематичний пошук з допомогою цієї програми нових *T*-факторизацій порядку 12.

З іншого ж боку, не виключена можливість неіснування *T*-факторизацій для певних дерев порядку 12, не знайдених у [9]. З метою доведення неіснування слід не припиняти пошук нових необхідних умов існування. Наша програма здатна (при наявності достатньої кількості машинного часу) встановити неіснування *T*-факторизацій для певного дерева *T* порядку 12. Тому бажано модернізувати цю програму з метою збільшення швидкодії. Вкажемо на один із шляхів такої модернізації – створення спеціалізованих програм побудови (чи доведення неіснування) *T*-факторизацій для дерев *T*, взятих з окремих класів дерев.

Зазначимо, що час від початку роботи до одержання програмою першої *T*-факторизації істотньо залежить від вибору вигляду початкового шаблону дерева *T*. Тому актуальна наступна задача, яка в описаних вище дослідженнях розв'язувалася на інтуїтивному рівні: вибрати початковий шаблон так, щоб мінімізувати цей час.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Beineke L. W., Decomposition of complete graphs into forests // Magyar Tud. Akad. Mat. Kut. Int. Közl. – 1964. –№ 9. –P. 589–594
2. Huang C., Rosa A., Decomposition of complete graphs into trees // Ars Combinatoria – 1978. –№ 5. –P.23–63.

3. Petrenjuk A. J., On tree factorizations of K_{10} // Journal of Combin. Math. and Combin. Computing –2002. – 41. – P.193–202.
4. Петренюк А. Я. Древесные факторизации полных графов: существование, построение, перечисление // Материалы 7 Международного семинара “Дискретная математика и ее приложения” (Москва, 29 января – 2 февраля 2001 г.). М.– 2001. – С. 26–30.
5. Петренюк А. Я., Півобертові деревні факторизації повних графів // Укр. матем. журнал. – 2001. –53, №5. – С. 710–716.
6. Петренюк А. Я., Необхідні умови існування Т-факторизацій // Доповіді НАНУ. –2002. – 3. – С.71–73.
7. Петренюк А. Я., Екстремальні розклади повних графів: існування, перелік // Докторська дис., Київ, 2002.– 266 стор.
8. Petrenjuk A. J., Nonisomorphic double star factorizations of order 12 // Наукові праці академії: випуск 4, частина 1 (за ред. Р. М. Макарова) –Кіровоград: Видавництво ДЛАУ, 1999, С. 212–214.
9. Петренюк А. Я. Петренюк Д. А., Неіснування деяких Т-факторизацій порядку 12, УМЖ (здано до друку)
10. Petrenjuk L. P. Petrenjuk A. J., On the existence of T-factorizations of order 12 // Матеріали II Міжнародної науково-практичної конференції “Динаміка наукових досліджень’2003”, 20–27 жовтня 2003 року, Дніпропетровськ–Кіровоград–Одеса, Т. 32, Математика. Дніпропетровськ, “Наука і освіта”, 2003, 21–23.
11. Petrenjuk A. J. Petrenjuk D. A., The nonexistence of some T-factorizations // Матеріали II Міжнародної науково-практичної конференції “Динаміка наукових досліджень’2003”, 20–27 жовтня 2003 року, Дніпропетровськ–Кіровоград–Одеса, Т. 32, Математика. Дніпропетровськ, “Наука і освіта”, 2003, 19–20.
12. Petrenjuk L. P. Petrenjuk A. J., 100 новых Т-факторизаций порядка 12. // Материалы 8 Международного семинара “Дискретная математика и ее приложения” (Москва, 29 января – 2 февраля 2004 г.), М.– 2004 (публікується).

Кіровоградський національний
технічний університет

Надійшло 11 травня 2004р.